

Curs 2

Introducere în programarea liniară

Modelarea și analiza datelor pentru decizii de management

Conf.dr.ing. Lăcrimioara GRAMA

Anul 2 master · Tehnologii, Sisteme și Aplicații pentru eActivități

Facultatea de Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

Suport curs MADDM · Lăcrimioara Grama · [CC BY-NC-SA 4.0](#)



Cursul precedent



Modelare și analiză

- ✓ Diferența dintre analiza datelor și modelarea datelor

Decizie managerială

- ✓ Rolul deciziei în procesul de management

Analiza calitativă și **analiza cantitativă**

Model matematic

- ✓ Funcția obiectiv, variabile de decizie, constrângeri, soluție optima

Aplicații economice

- ✓ Cost, venit, profit, prag de rentabilitate

La finalul acestui curs, studenții vor putea să:

- explice conceptul de programare liniară;
- formuleze un model LP pornind de la o problemă managerială;
- identifice funcția obiectiv, variabilele de decizie și constrângerile;
- rezolve grafic probleme LP cu două variabile;
- interpreteze soluția optimă și resursele neutilizate;
- recunoască situații speciale: soluții alternative, nefezabile și nemărginite

Obiectivele cursului

Cuprins

Programarea liniară

- Formularea problemei
- Metoda grafică

Problemă LP de maximizare

- Formularea problemei
- Modelul matematic
- Metoda grafică
 - Variabile de reducere

Problemă LP de minimizare

- Metoda grafică
- Variabile de surplus

Situații speciale în problemele de programare liniară

- Soluții optimale alternative
- Soluții nefezabile
- Soluții nemărginite

Rezumat

Programarea liniară (LP)

Ce este LP?

Programarea liniară (*linear programming*) este o metodă de alegere a unei soluții atunci când obiectivul și constrângerile sunt liniare

Ce urmărim?

Obiectiv: maximizarea sau minimizarea unei cantități: profit, cost, timp sau resurse

- Toate problemele LP au constrângeri care limitează gradul în care poate fi urmărit obiectivul

Ce căutăm?

Soluție fezabilă = soluție care satisface toate constrângerile

O soluție optimă: soluție fezabilă care oferă cea mai bună valoare a funcției obiectiv



Pentru două variabile de decizie, problema poate fi rezolvată grafic

Programarea liniară (LP) (cont.)

Problemă LP

Funcție obiectiv liniară + constrângeri liniare

Constrângeri liniare = funcții liniare restricționate prin relații de tip $\leq$, $=$ sau $\geq$

Forme ale problemei LP

Forma primală: formularea inițială a problemei

Forma duală: formulare asociată problemei primale; în general, maximizarea devine minimizare, și invers

Aplicațiile LP sunt variate

După natura problemei:

- planificarea și controlul producției,
- distribuția în rețele,
- alocarea resurselor

După sectorul industrial:

- industrie manufacturieră,
- energie,
- transporturi,
- telecomunicații,
- finanțe

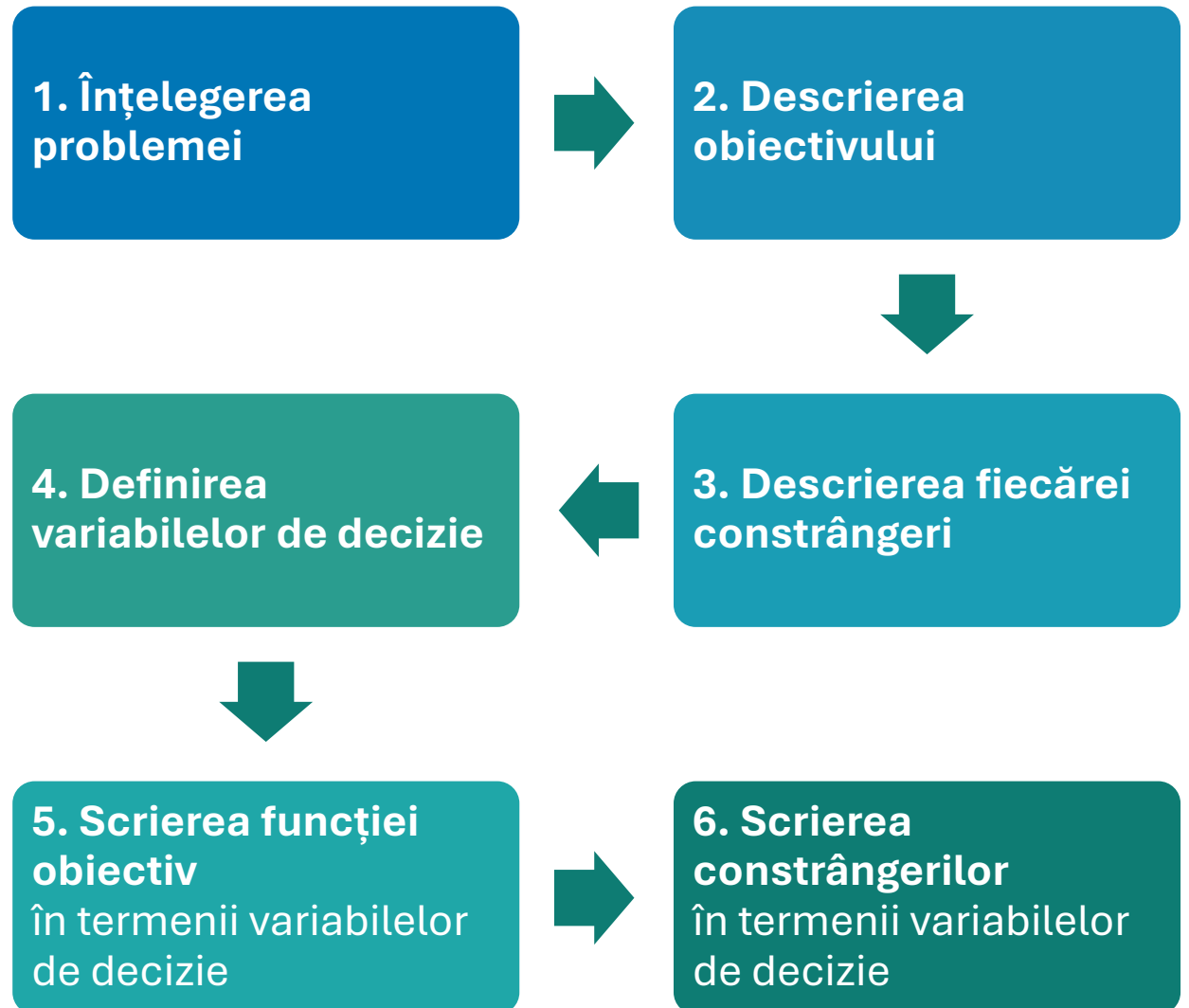
Formularea problemei

Pași pentru formularea modelului LP

Formularea/modelarea problemei

Procesul de transpunere a unui enunț verbal al unei probleme într-un model matematic

Fiecare problemă LP are caracteristici specifice, dar majoritatea problemelor au și elemente comune



Formularea problemei (cont.)

Ex: Un agricultor are la dispoziție H hectare de teren arabil, E unități de îngrășământ și I unități de insecticid. Pe teren poate cultiva **grâu** sau **porumb**. Grâul necesită E_1 îngrășământ/ha și I_1 insecticid/ha, iar porumbul necesită E_2 îngrășământ/ha și I_2 insecticid/ha.

Dacă P_1 și P_2 reprezintă venitul net/ha pentru grâu, respectiv porumb, se dorește determinarea suprafeței optime cultivate cu fiecare cultură.

Obiectiv

Maximizarea venitului net total

Constrângeri

C1: Suprafața cultivată cu grâu și porumb $\leq$ suprafața disponibilă

C2: Îngrășământul utilizat pentru cele două culturi $\leq$ îngrășământ disponibil

C3: Insecticidul utilizat pentru cele două culturi $\leq$ insecticid disponibil

Variabile de decizie

x_1 – numărul de ha cultivate cu grâu

x_2 – numărul de ha cultivate cu porumb



Formularea problemei (cont.)

Ex: Un agricultor are la dispoziție H hectare de teren arabil, E unități de îngrășământ și I unități de insecticid. Pe teren poate cultiva grâu sau porumb. Grâul necesită E_1 îngrășământ/ha și I_1 insecticid/ha, iar porumbul necesită E_2 îngrășământ/ha și I_2 insecticid/ha.

Dacă P_1 și P_2 reprezintă venitul net/ha pentru grâu, respectiv porumb, se dorește determinarea suprafeței optime cultivate cu fiecare cultură.

Obiectiv în termenii variabilelor de decizie

Contribuția grâului: $P_1 x_1$

Contribuția porumbului: $P_2 x_2$

Funcția obiectiv: _____



Constrângeri în termenii variabilelor de decizie

C1: _____ (ha cultivate cu grâu și porumb) $\leq$ (ha disponibile)

C2: _____ (îngrășământ utilizat) $\leq$ (îngrășământ disponibil)

C3: _____ (insecticid utilizat) $\leq$ (insecticid disponibil)

Agricultorul nu poate cultiva un număr negativ de ha: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Formularea problemei (cont.)

Ex: Un agricultor are la dispoziție H hectare de teren arabil, E unități de îngrășământ și I unități de insecticid. Pe teren poate cultiva grâu sau porumb. Grâul necesită E_1 îngrășământ/ha și I_1 insecticid/ha, iar porumbul necesită E_2 îngrășământ/ha și I_2 insecticid/ha.

Dacă P_1 și P_2 reprezintă venitul net/ha pentru grâu, respectiv porumb, se dorește determinarea suprafeței optime cultivate cu fiecare cultură.

➤ Modelul matematic complet

$$\begin{array}{llllll} \text{Max} & P_1x_1 & + & P_2x_2 & & \text{(funcția obiectiv)} \\ \text{s. t.} & x_1 & + & x_2 & \leq & H \quad \text{(ha plantate)} \\ & E_1x_1 & + & E_2x_2 & \leq & E \quad \text{(îngrășămintele utilizate)} \\ & I_1x_1 & + & I_2x_2 & \leq & I \quad \text{(insecticid utilizat)} \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \quad \text{(nenegativitate)} \end{array}$$

Pentru n variabile de decizie $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, funcția obiectiv este o aplicație liniară de forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n$$

Soluția optimă este setul de valori ale variabilelor de decizie care optimizează funcția obiectiv și respectă toate constrângerile

Aplicații tipice de programare liniară

Ex: O firmă dorește să-și planifice producția și să dezvolte o politică de inventariere care să satisfacă viitoarele cerințe de piață. Obiectivul este de a maximiza producția totală și costurile de inventar, satisfăcând complet cererea pieței. Restricțiile sunt date de cerere și de capacitatea de producție.

Ex: Un analist financiar are de ales un portofoliu de investiții dintr-o varietate de stocuri și alternative de investiții corespunzătoare. Problema constă în stabilirea portofoliului ce maximizează câștigul investiției. Restricțiile sunt determinate de venitul total alocat investițiilor și de plafonul maxim al investiției într-un anumit domeniu.

Ex: Un manager de marketing dorește să aloce bugetul destinat publicității în diferite mijloace media: radio, TV, ziare, reviste, internet. Dorește să afle soluția ce maximizează eficiența publicității. Restricțiile sunt date de valoarea bugetului alocat publicității și de disponibilitatea mijloacelor media.

Ex: O companie are magazine de desfacere în mai multe orașe din țară. Ținând seama de cererile locale, încearcă stabilirea cantităților de produse ce vor fi expediate fiecărui magazin, a.î. costurile totale de transport să fie minime. Restricțiile sunt date de cantitatea de produse furnizate fiecărui magazin.

Metoda grafică

Se aplică pentru probleme LP cu **două variabile** de decizie

Mulțimea soluțiilor admisibile

Mulțimea valorilor variabilelor x_1 și x_2 care îndeplinesc constrângerile

Primul pas

Determinarea mulțimii soluțiilor admisibile

- Pentru $x_1 \geq 0$ și $x_2 \geq 0 \Rightarrow$ primul cadran
- Se reprezintă grafic fiecare constrângere ($a_j x_1 + b_j x_2 \leq c_j$ sau $a_j x_1 + b_j x_2 \geq c_j, j = \overline{1, p}$)
 - Se desenează dreapta $a_j x_1 + b_j x_2 = c_j$ care împarte planul în două regiuni, R_1^j și R_2^j
 - Se păstrează regiunea care satisface constrângerea
 - Intersecția regiunilor este mulțimea soluțiilor admisibile

Dacă o problemă LP are **soluție optimă**, atunci cel puțin o soluție optimă se află într-un punct extrem al mulțimii soluțiilor admisibile

- Aceste vârfuri se numesc **puncte de extrem** ale mulțimii soluțiilor admisibile

Pași metodei grafice

1. Se reprezintă grafic mulțimea soluțiilor admisibile



2. Se determină punctele de extrem ale regiunii admisibile



3. Se calculează funcția obiectiv în fiecare punct de extrem



4. Se identifică punctul de extrem cu valoarea optimă



5. Coordonatele punctului optim dau soluția optimă

Cuprins

Programarea liniară

Problemă LP de maximizare

- Formularea problemei
- Modelul matematic
- Metoda grafică
 - Variabile de reducere

Problemă LP de minimizare

Situații speciale în problemele de programare liniară

Rezumat

Problemă LP de maximizare a profitului

Ex: Firma X produce geți de voiaj. În urma discuțiilor cu un distribuitor important, managerul firmei are oportunitatea de a introduce pe piață două modele noi: geți standard și geți de lux. Distribuitorul este dispus să cumpere producția realizată în următoarele trei luni.

Producerea fiecărei geți implică patru operații: croire și vopsire, coasere, finisare, respectiv verificare și ambalare. Numărul de ore disponibile în fiecare departament este limitat. După analiza previziunii volumului de muncă, managerul de producție estimează că, pentru următoarele trei luni, sunt disponibile 630 ore pentru croire și vopsire, 600 ore pentru coasere, 708 ore pentru finisare și 135 ore pentru verificare și ambalare.

Analizând procesul de fabricație, managerul constată că:

- Pentru o geantă standard sunt necesare: $7/10$ ore pentru croire și vopsire, $1/2$ ore pentru coasere, o oră pentru finisare și $1/10$ ore pentru verificare și ambalare.
- Pentru o geantă de lux sunt necesare: 1 oră pentru croire și vopsire, $5/6$ ore pentru coasere, $2/3$ ore pentru finisare și $1/4$ ore pentru verificare și ambalare.

Departamentul de contabilitate a estimat, pe baza costurilor variabile relevante, că fiecare geantă standard aduce o contribuție la profit de 10 lei, iar fiecare geantă de lux aduce o contribuție la profit de 9 lei.

Obiectivul firmei este de a determina numărul optim de geți standard și de geți de lux care trebuie produse în următoarele trei luni, astfel încât profitul total să fie maxim.

Formularea problemei

- *Înțelegerea problemei*: din enunțul problemei extragem elementele necesare pentru formularea modelului LP: obiectivul, constrângerile și variabilele de decizie

Obiectiv

Maximizarea contribuției totale la profit



Variabile de decizie (intrări controlabile)

S – numărul de geanți standard produse

L – numărul de geanți de lux produse

Obiectivul firmei este de a determina numărul optim de geanți standard și de geanți de lux care trebuie produse în următoarele trei luni, astfel încât profitul total să fie maxim.

Constrângeri

C1: Orele utilizate pentru croire și vopsire $\leq$ orele disponibile

C2: Orele utilizate pentru coasere $\leq$ orele disponibile

C3: Orele utilizate pentru finisare $\leq$ orele disponibile

C4: Orele utilizate pentru verificare și ambalare $\leq$ orele disponibile

Managerul firmei dorește să producă două noi modele: geanți de preț mediu și geanți de lux.

Producerea fiecărei geanți implică patru operații: croire și vopsire, coasere, finisare, respectiv verificare și ambalare. Numărul de ore disponibile în fiecare departament este limitat.

Formularea problemei (cont.)

Obiectiv în termenii variabilelor de decizie

Contribuția geților standard: $10S$

Contribuția geților de lux: $9L$

Funcția obiectiv: _____

Firma X produce geți de voiaj. [...] geți standard și geți de lux.
[...]

Departamentul de contabilitate a estimat [...] că fiecare geantă standard aduce o contribuție la profit de 10 lei, iar fiecare geantă de lux aduce o contribuție la profit de 9 lei. Obiectivul firmei este de a determina numărul optim de geți standard și de geți de lux care trebuie produse în următoarele trei luni, astfel încât profitul total să fie maxim.

După analiza previziunii volumului de muncă, managerul de producție estimează că, pentru următoarele trei luni, sunt disponibile 630 ore pentru croire și vopsire, 600 ore pentru coasere, 708 ore pentru finisare și 135 ore pentru verificare și ambalare.

Constrângeri în termenii variabilelor de decizie

C1: _____ (ore utilizate pentru croire și vopsire) $\leq$ (ore disponibile)

C2: _____ (ore utilizate pentru coasere) $\leq$ (ore disponibile)

C3: _____ (ore utilizate pentru finisare) $\leq$ (ore disponibile)

C4: _____ (ore utilizate pentru verificare și ambalare) $\leq$ (ore disponibile)

Nu se pot produce un număr negativ de geți: $S \geq 0, L \geq 0$

Analizând procesul de fabricație, managerul constată că:

- Pentru o geantă standard sunt necesare: 7/10 ore pentru croire și vopsire, 1/2 ore pentru coasere, 0 oră pentru finisare și 1/10 ore pentru verificare și ambalare.
- Pentru o geantă de lux sunt necesare: 1 oră pentru croire și vopsire, 5/6 ore pentru coasere, 2/3 ore pentru finisare și 1/4 ore pentru verificare și ambalare.

Modelul matematic

- Modelarea matematică a problemei este acum completă
 - Am reușit să traducem obiectivul și constrângerile problemei într-un set de relații matematice (= model matematic)

Max	$10S$	+	$9L$			(funcția obiectiv)
s. t.	$\frac{7}{10}S$	+	$1L$	$\leq$	630	(croire și vopsire)
	$\frac{1}{2}S$	+	$\frac{5}{6}L$	$\leq$	600	(coasere)
	$1S$	+	$\frac{2}{3}L$	$\leq$	708	(finisare)
	$\frac{1}{10}S$	+	$\frac{1}{4}L$	$\leq$	135	(verificare și ambalare)
	$S,$		L	$\geq$	0	(nenegativitate)

- Trebuie să găsim combinația (S, L) care satisface toate constrângerile și maximizează funcția obiectiv
 - Această combinație reprezintă soluția optimă a problemei

Ipotezele modelului LP

➤ Pentru ca un model de programare liniară să fie adecvat, sunt necesare următoarele ipoteze:

Proportionalitatea

Contribuția la funcția obiectiv și cantitatea de resurse utilizate sunt proporționale cu valoarea fiecărei variabile de decizie

Aditivitatea

Valoarea funcției obiectiv și resursele totale utilizate se obțin prin însumarea contribuțiilor tuturor variabilelor de decizie

Divizibilitatea

Variabilele de decizie sunt continue și pot lua orice valoare mai mare sau egală cu zero

Observație: Modelele LP sunt o subclasă a modelelor de programare matematică. Ele conțin o funcție obiectiv și un set de constrângeri, toate exprimate prin funcții liniare

Metoda grafică

1) Desenăm mulțimea soluțiilor admisibile/ regiunea fezabilă (valorile pentru S și L)

- Pe abscisă valorile lui S ; pe ordonată valorile lui L
- $S, L \geq 0 \Rightarrow$ cadranul I

C1: $\frac{7}{10}S + 1L \leq 630$

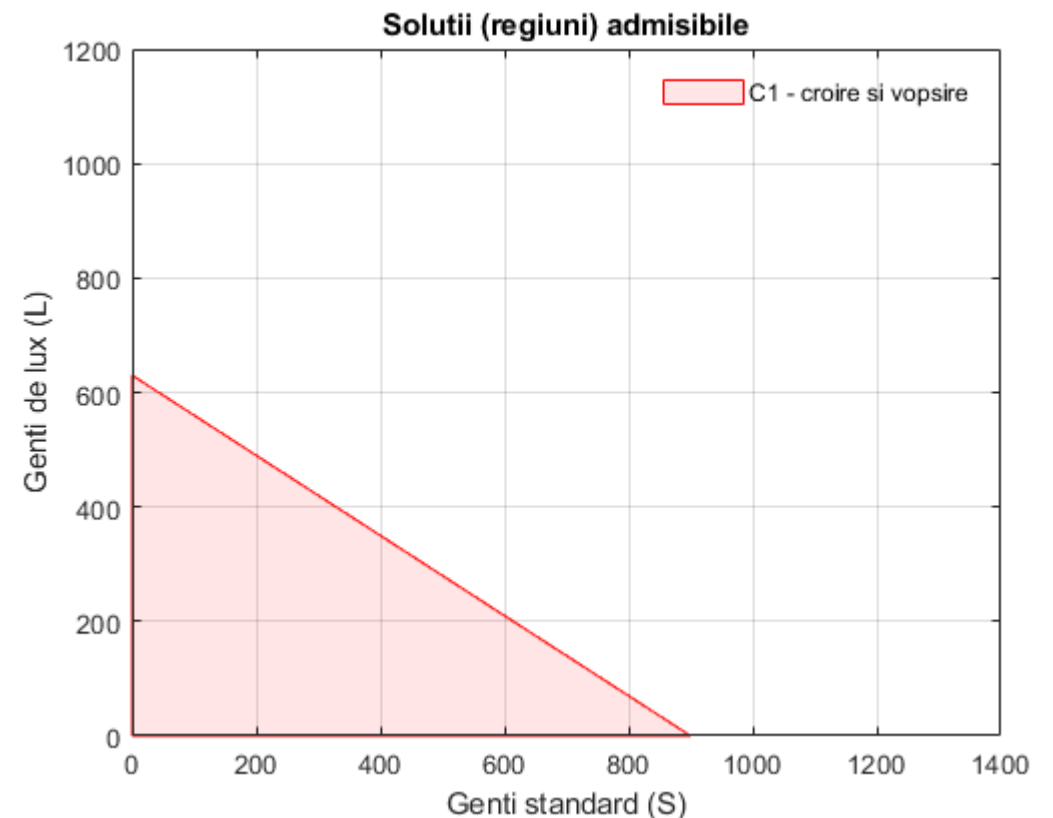
Dreapta asociată constrângerii: $\frac{7}{10}S + L = 630$

$$S = 0 \Rightarrow L = 630$$

$$L = 0 \Rightarrow S = \frac{6300}{7} = 900$$

$\Rightarrow$ Regiunea admisibilă pentru C1 este semiplanul de sub dreapta care trece prin punctele $(0, 630)$ și $(900, 0)$

Max	$10S$	+	$9L$		(funcția obiectiv)
s. t.	$\frac{7}{10}S$	+	$1L$	≤ 630	(croire și vopsire)
	$\frac{1}{2}S$	+	$\frac{5}{6}L$	≤ 600	(coasere)
	$1S$	+	$\frac{2}{3}L$	≤ 708	(finisare)
	$\frac{1}{10}S$	+	$\frac{1}{4}L$	≤ 135	(verificare și ambalare)
	$S,$		L	≥ 0	(nenegativitate)



Metoda grafică (cont.)

- 1) Desenăm mulțimea soluțiilor admisibile/ regiunea fezabilă (valorile pentru S și L)

C2: $\frac{1}{2}S + \frac{5}{6}L \leq 600$

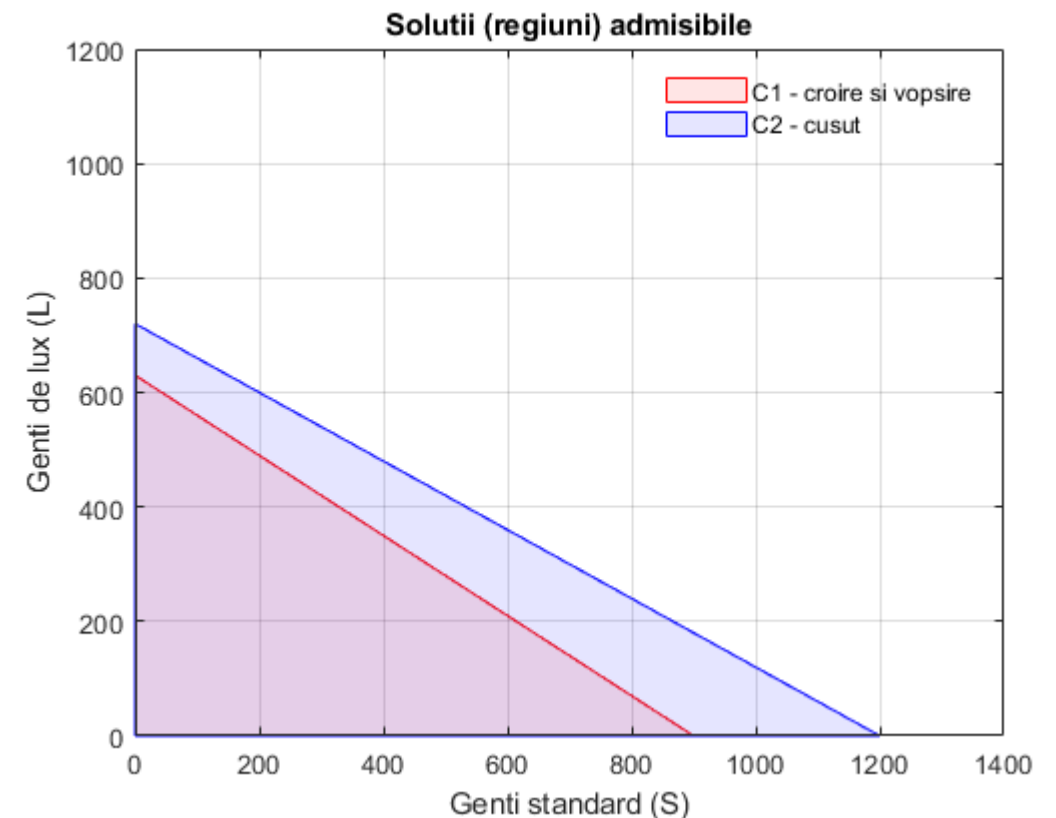
$$\frac{1}{2}S + \frac{5}{6}L = 600$$

$$S = 0 \Rightarrow L = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$L = 0 \Rightarrow S = \underline{\hspace{2cm}}$$

⇒ Regiunea admisibilă pentru C2 este semiplanul de sub dreapta care trece prin punctele $(0, \underline{\hspace{2cm}})$ și $(\underline{\hspace{2cm}}, 0)$

Max	$10S$	+	$9L$		(funcția obiectiv)
s. t.	$\frac{7}{10}S$	+	$1L$	≤ 630	(croire și vopsire)
	$\frac{1}{2}S$	+	$\frac{5}{6}L$	≤ 600	(coasere)
	$1S$	+	$\frac{2}{3}L$	≤ 708	(finisare)
	$\frac{1}{10}S$	+	$\frac{1}{4}L$	≤ 135	(verificare și ambalare)
	$S,$		L	≥ 0	(nenegativitate)



Metoda grafică (cont.)

- 1) Desenăm mulțimea soluțiilor admisibile/ regiunea fezabilă (valorile pentru S și L)

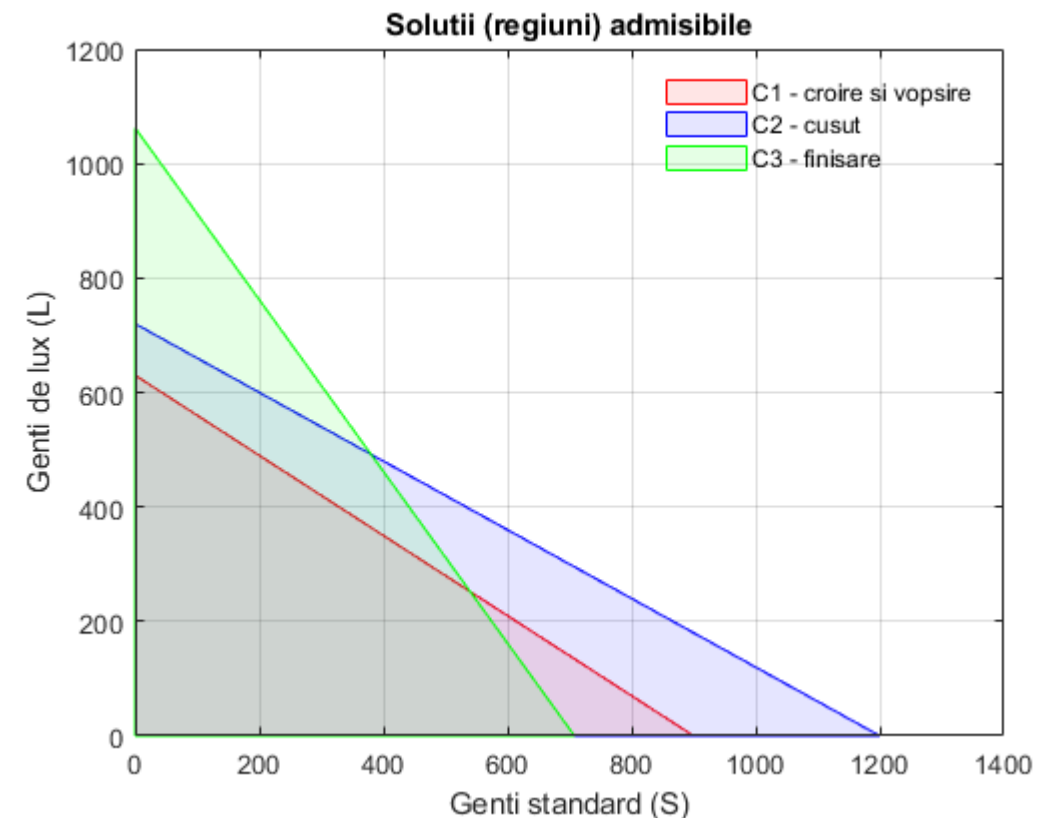
C3: $1S + 2/3L \leq 708$

$S = 0 \Rightarrow L = \underline{\hspace{2cm}}$

$L = 0 \Rightarrow S = \underline{\hspace{2cm}}$

⇒ Regiunea admisibilă pentru C3 este semiplanul de sub dreapta care trece prin punctele $(0, \underline{\hspace{2cm}})$ și $(\underline{\hspace{2cm}}, 0)$

Max	$10S$	+	$9L$		(funcția obiectiv)
s. t.	$\frac{7}{10}S$	+	$1L$	≤ 630	(croire și vopsire)
	$\frac{1}{2}S$	+	$\frac{5}{6}L$	≤ 600	(coasere)
	$1S$	+	$\frac{2}{3}L$	≤ 708	(finisare)
	$\frac{1}{10}S$	+	$\frac{1}{4}L$	≤ 135	(verificare și ambalare)
	$S,$		L	≥ 0	(nenegativitate)



Metoda grafică (cont.)

- 1) Desenăm mulțimea soluțiilor admisibile/ regiunea fezabilă (valorile pentru S și L)

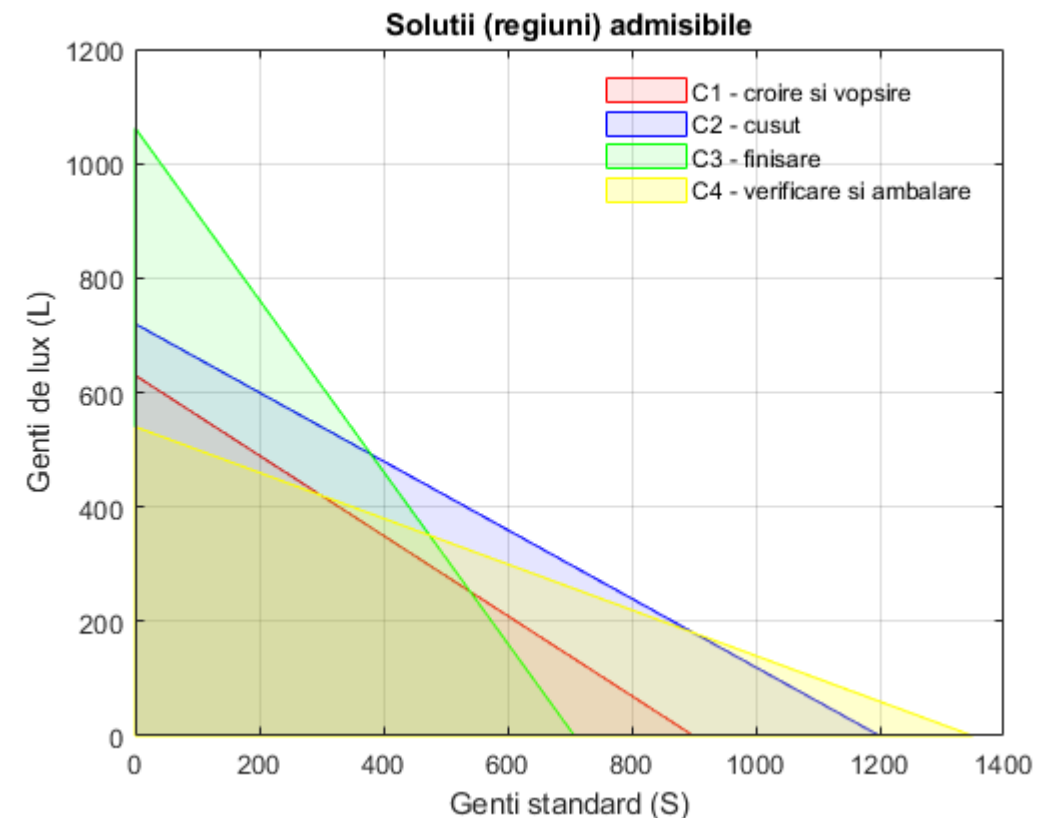
C4: $\frac{1}{10}S + \frac{1}{4}L \leq 135$

$S = 0 \Rightarrow L = \underline{\hspace{2cm}}$

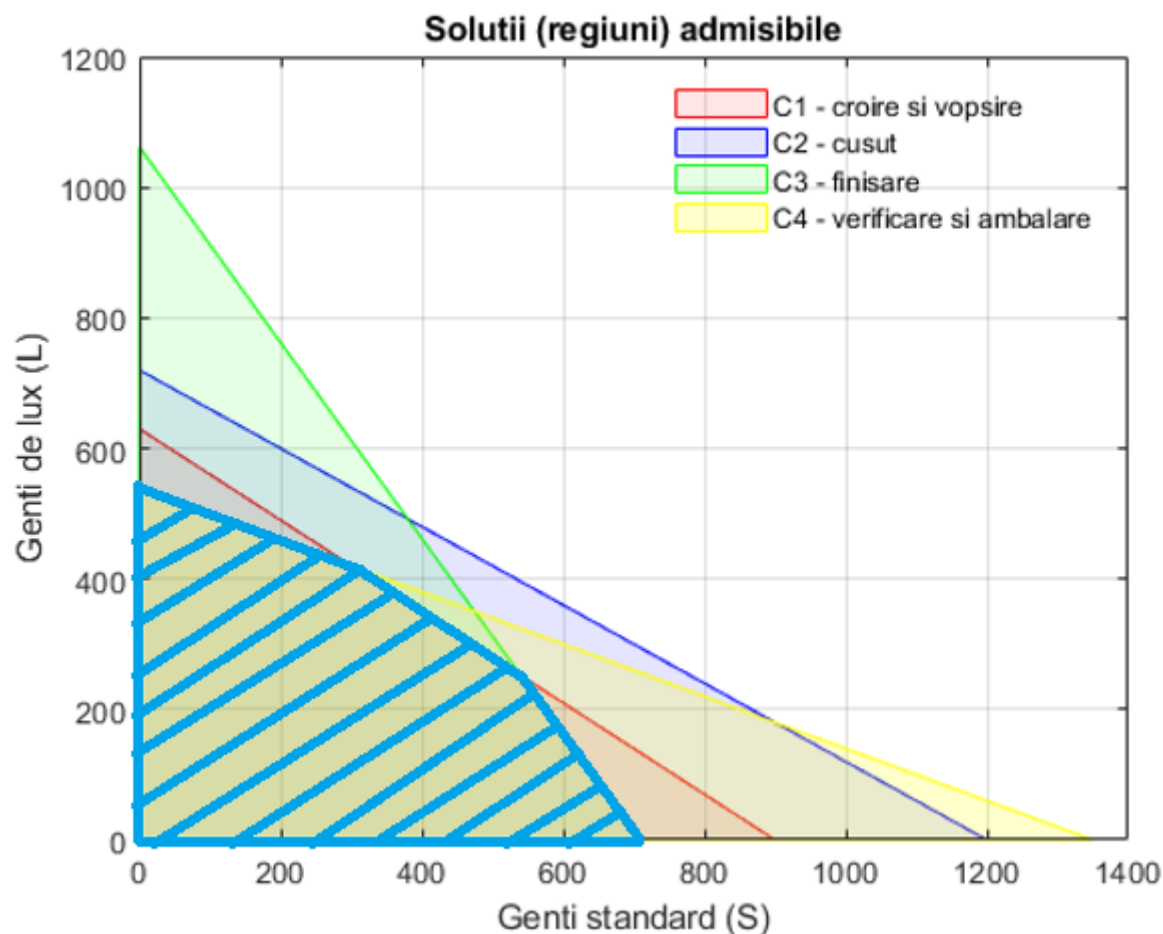
$L = 0 \Rightarrow S = \underline{\hspace{2cm}}$

⇒ Regiunea admisibilă pentru C4 este semiplanul de sub dreapta care trece prin punctele $(0, \underline{\hspace{2cm}})$ și $(\underline{\hspace{2cm}}, 0)$

Max	$10S + 9L$		(funcția obiectiv)
s. t.	$\frac{7}{10}S + 1L \leq 630$		(croire și vopsire)
	$\frac{1}{2}S + \frac{5}{6}L \leq 600$		(coasere)
	$1S + \frac{2}{3}L \leq 708$		(finisare)
	$\frac{1}{10}S + \frac{1}{4}L \leq 135$		(verificare și ambalare)
	$S, L \geq 0$		(nenegativitate)



Metoda grafică (cont.)



Idee-cheie

Mulțimea soluțiilor admisibile = intersecția regiunilor obținute

- Constrângerea dată de **coasere (C2)** este **redundantă**:
- Regiunea fezabilă ar fi aceeași și fără această constrângere
 - Există suficient timp disponibil în departamentul de coasere pentru orice nivel de producție permis de celelalte constrângeri
 - Prin urmare, **C2** nu modifică regiunea fezabilă și, implicit, nu poate afecta soluția optimă

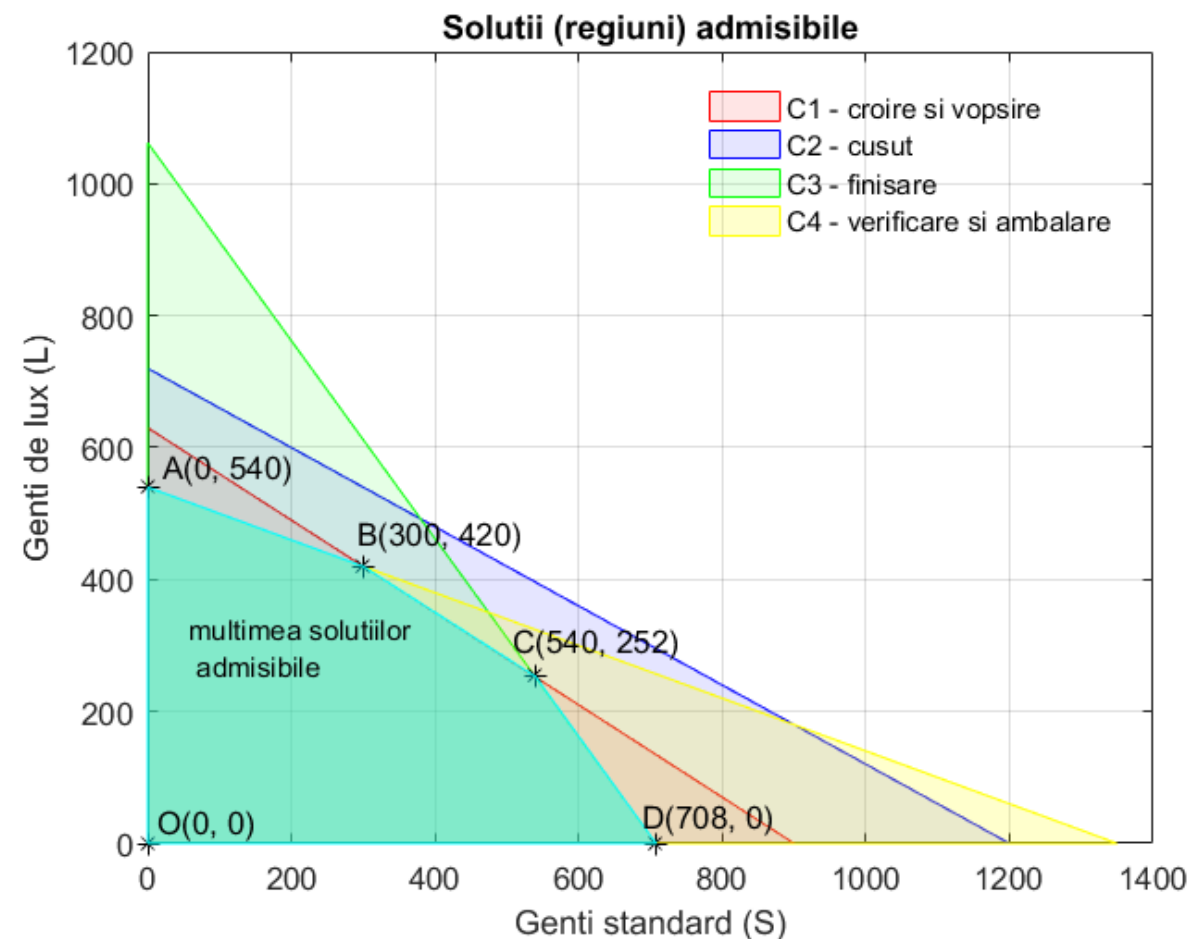
Metoda grafică (cont.)

2) Calculăm coordonatele vârfurilor regiunii fezabile

- $O(0, 0)$
- $A(0, 540) \leftarrow \text{C4}$
- $B(300, 420) \leftarrow \text{C1 și C4}$
- $C(540, 252) \leftarrow \text{C1 și C3}$
- $D(708, 0) \leftarrow \text{C3}$

Ex: calculul coordonatelor punctului B

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(C1)} \quad \frac{7}{10}S + 1L = 630 \\ \text{(C4)} \quad \frac{1}{10}S + \frac{1}{4}L = 135 \end{array} \right\} \cdot (-7) \quad +$$
$$\Rightarrow -\frac{3}{4}L = -315 \Rightarrow L = \frac{315 \cdot 4}{3} = 420$$
$$\Rightarrow S = \frac{(630 - 420) \cdot 10}{7} = 300$$



Metoda grafică (cont.)

3) Calculăm valoarea funcției obiectiv $10S + 9L$ în punctele de extrem

- $O(0, 0) \Rightarrow 10 \cdot 0 + 9 \cdot 0 = 0$
- $A(0, 540) \Rightarrow$ _____
- $B(300, 420) \Rightarrow$ _____
- $C(540, 252) \Rightarrow$ _____
- $D(708, 0) \Rightarrow$ _____

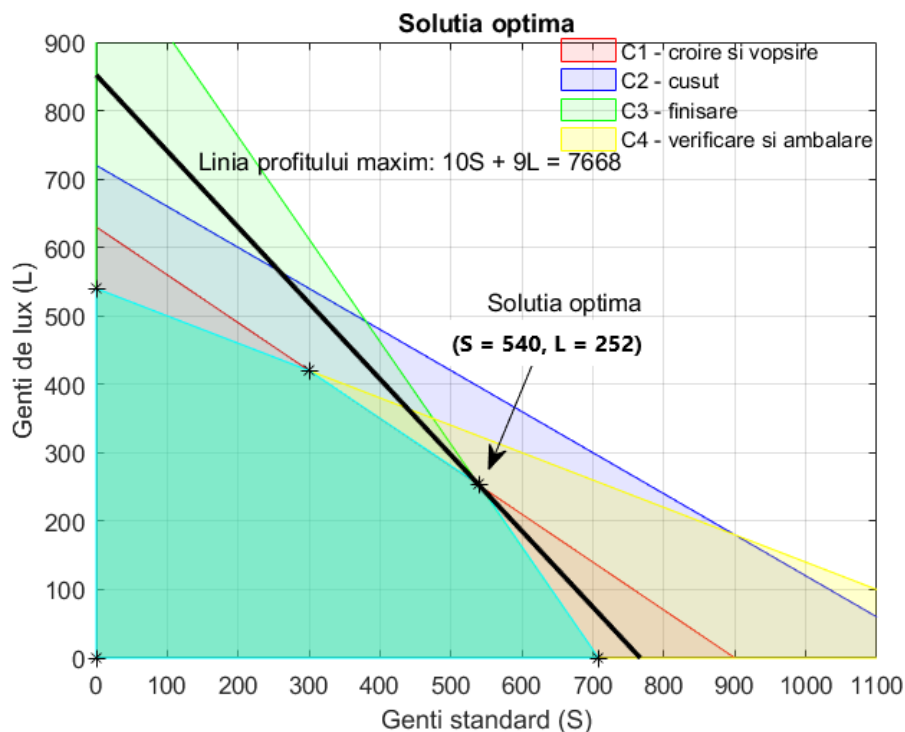
4) Identificăm punctul de extrem în care valoarea funcției obiectiv este maximă (în punctul _____
valoarea funcției obiectiv este _____)

5) Coordonatele acestui punct sunt valorile optime: $S =$ _____ și $L =$ _____

Concluzie

Prin producerea a _____ genți standard și _____ genți de lux se obține un profit maxim de _____ lei

Interpretarea soluției optime



- În punctul optim $S = 540, L = 252$, constrângerile active sunt **C1** și **C3**
 - ⇒ Acestea sunt constrângerile care determină punctul optim și utilizează integral timpul disponibil
- Constrângerile **C2** și **C4** nu sunt active în punctul optim
 - ⇒ Prin urmare, rămâne capacitate neutilizată în aceste două departamente
- În plus față de soluția optimă și contribuția la profit asociată, conducerea firmei va dori probabil informații despre timpii de producție necesari pentru fiecare operațiune în parte
 - Putem determina aceste informații prin înlocuirea valorilor soluției optime ($S = 540, L = 252$) în constrângeri

➤ Timpii de producție (în ore) utilizați, în cazul profitului maxim:

- **Croire și vopsire**: $7/10 \cdot 540 + 252 = 630$ (0 ore nefolosite)
- **Coasere**: $1/2 \cdot 540 + 5/6 \cdot 252 = 480$ (**120** ore nefolosite)
- **Finisare**: $540 + 2/3 \cdot 252 = 708$ (0 ore nefolosite)
- **Verificare și ambalare**: $1/10 \cdot 540 + 1/4 \cdot 252 = 117$ (**18** ore nefolosite)

Concluzie managerială

Există **capacitate neutilizată** în două departamente (coasere; verificare și ambalare)

Variabile de reducere

Uneori, în problema LP se adaugă variabile asociate constrângerilor de tip $\leq$, denumite **variabile de reducere** (*slack variables*)

- Acestea indică resursa neutilizată
- Funcția obiectiv nu se modifică, deoarece variabile de reducere nu contribuie la profit, deci au coeficient 0

Max	$10S$	$+9L$	$+0s_1$	$+0s_2$	$+0s_3$	$+0s_4$		(funcția obiectiv)
s. t.	$\frac{7}{10}S$	$+1L$	$+1s_1$				$= 630$	(croire și vopsire)
	$\frac{1}{2}S$	$+\frac{5}{6}L$		$+1s_2$			$= 600$	(coasere)
	$1S$	$+\frac{2}{3}L$			$+1s_3$		$= 708$	(finisare)
	$\frac{1}{10}S$	$+\frac{1}{4}L$				$+1s_4$	$= 135$	(verificare și ambalare)
	$S,$	$L,$	$s_1,$	$s_2,$	$s_3,$	s_4	≥ 0	(nenegativitate)

În soluția optimă
 $S = 540, L = 252$:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = 120$$

$$s_3 = 0$$

$$s_4 = 18$$

- După introducerea variabilelor de reducere, constrângerile devin egalități, iar modelul LP este scris în **formă standard** pentru rezolvare

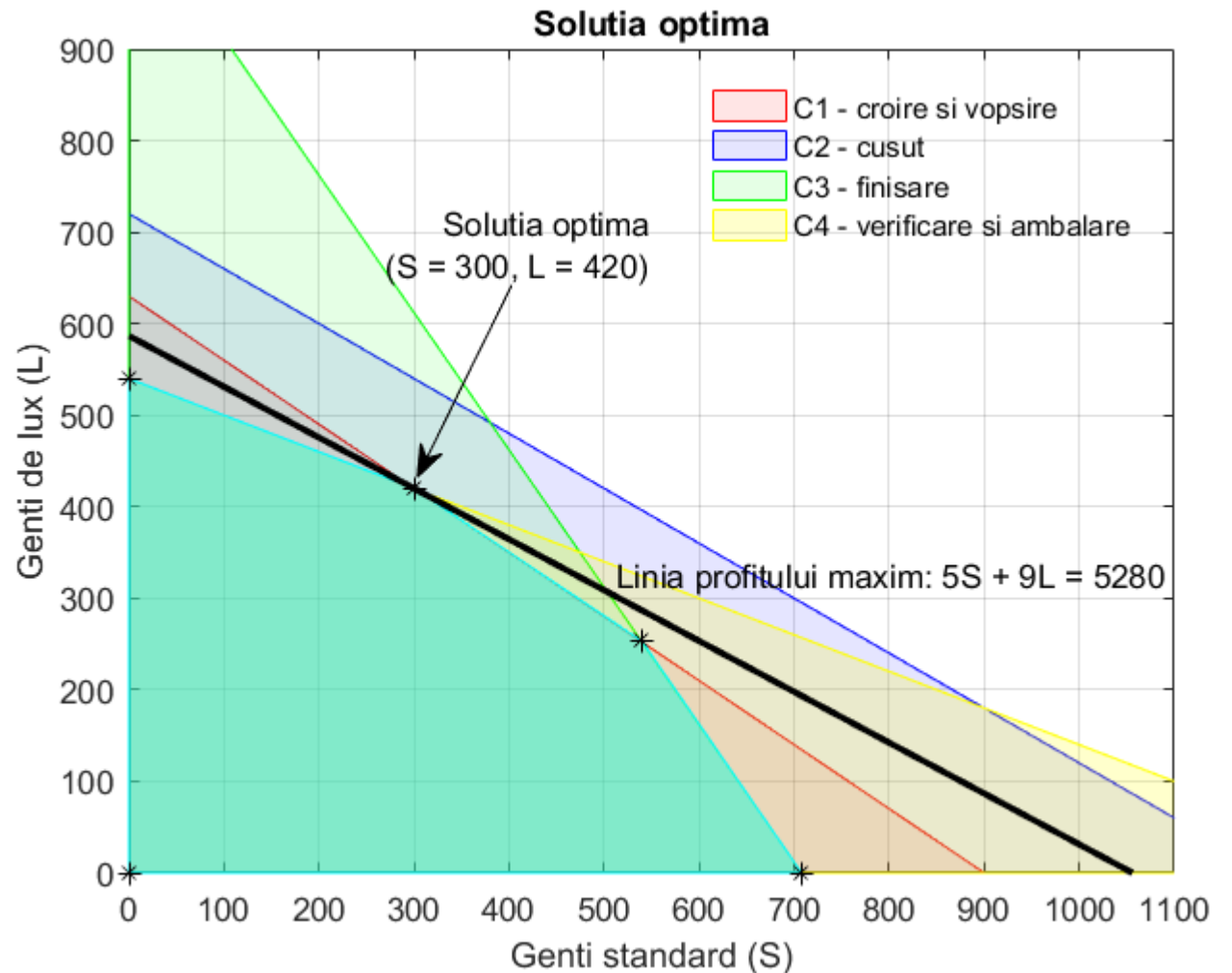
Efectul modificării profitului asupra soluției optime

Ex: Să presupunem că, pentru firma X, contribuția la profit a unei genți standard scade la 5 lei, iar contribuția unei genți de lux rămâne 9 lei. Restricțiile privind timpii de lucru rămân aceleași.

- Se modifică doar funcția obiectiv:
$$\text{Max } 5S + 9L$$
- Regiunea fezabilă rămâne aceeași, deoarece constrângerile nu se modifică

Concluzie

Noua soluție optimă este $S = 300, L = 420$, cu profit maxim de 5280 lei



Observații

Variabile de reducere

În forma standard a unui model LP, coeficienții funcției obiectiv pentru variabilele de reducere sunt zero

⇒ Variabilele de reducere (care reprezintă resurse neutilizate) nu afectează valoarea funcției obiectiv

Totuși, în unele aplicații, resursele neutilizate pot fi valorificate/vândute

În acest caz, ele pot primi coeficienți nenuli în funcția obiectiv, corespunzători profitului asociat vânzării lor

Constrângeri redundante

Constrângerile redundante nu modifică regiunea fezabilă

⇒ Ele pot fi eliminate din model fără a afecta soluția optimă

Totuși, dacă modelul este rezolvat din nou pentru alte date, o constrângere anterior redundantă poate deveni neredundantă sau activă

De aceea, în practică, se recomandă păstrarea constrângerilor în model

Idee-cheie: variabilele de reducere și constrângerile redundante nu sunt doar elemente matematice, ci ajută la interpretarea managerială a modelului

Cuprins

Programarea liniară

Problemă LP de maximizare

Problemă LP de minimizare

- Metoda grafică
- Variabile de surplus

Situații speciale în problemele de programare liniară

Rezumat

Problemă LP de minimizare a costului



Ex: O fabrică de produse chimice produce două produse, A și B, utilizate ca materii prime de companii producătoare de săpunuri și detergenți. Pe baza inventarului curent și a cererii estimate pentru luna următoare, managerii au stabilit că **producția totală a produselor A și B trebuie să fie de cel puțin 350 tone**. În plus, trebuie onorată comanda unui client important pentru **cel puțin 125 tone de produs A**.

Produsul **A necesită 2 ore** de procesare pe tonă, iar produsul **B necesită 1 oră** de procesare pe tonă. Pentru luna următoare **sunt disponibile cel mult 600 ore de procesare**.

Costurile de producție sunt de 2 mii lei/tonă pentru produsul A și 3 mii lei/tonă pentru produsul B. Obiectivul managerilor este satisfacerea cererilor de producție cu un cost total minim.

➤ Pentru a determina programul de producție cu cost minim, formulăm problema ca model LP

Variabile de decizie

A – numărul de tone fabricate din produsul A

B – numărul de tone fabricate din produsul B

Obiectiv în termenii variabilelor de decizie

$$\text{Min } 2A + 3B$$

Constrângeri în termenii variabilelor de decizie

C1: _____ (cerere minimă pentru produsul A)

C2: _____ (producție totală minimă)

C3: _____ (capacitate maximă de procesare)

Nu se pot produce cantități negative: $A \geq 0$, $B \geq 0$

Modelul matematic al problemei de minimizare

- **Reamintire:** fabrica produce două produse, A și B. Se urmărește satisfacerea cerințelor de producție cu un cost total minim, ținând cont de cererea minimă și de timpul maxim de procesare disponibil
- Modelul matematic complet

$$\begin{array}{llllll} \text{Min} & 2A & +3B & & & \text{(funcția obiectiv)} \\ \text{s. t.} & 1A & & \geq & 125 & \text{(cerere produs A)} \\ & 1A & +1B & \geq & 350 & \text{(producție totală)} \\ & 2A & +1B & \leq & 600 & \text{(timp procesare)} \\ & A, & B & \geq & 0 & \text{(nenegativitate)} \end{array}$$



Idee-cheie: spre deosebire de problema de maximizare, aici căutăm soluția fezabilă cu valoarea minimă a funcției obiectiv

Metoda grafică

➤ Având doar 2 variabile de decizie se poate aplica metoda grafică

1) Desenăm mulțimea soluțiilor admisibile

- Pe abscisă valorile lui A ; pe ordonată valorile lui B
- $A, B \geq 0 \Rightarrow$ cadranul I

C1: $1A \geq 125$ _____

C2: $1A + 1B \geq 350$ _____

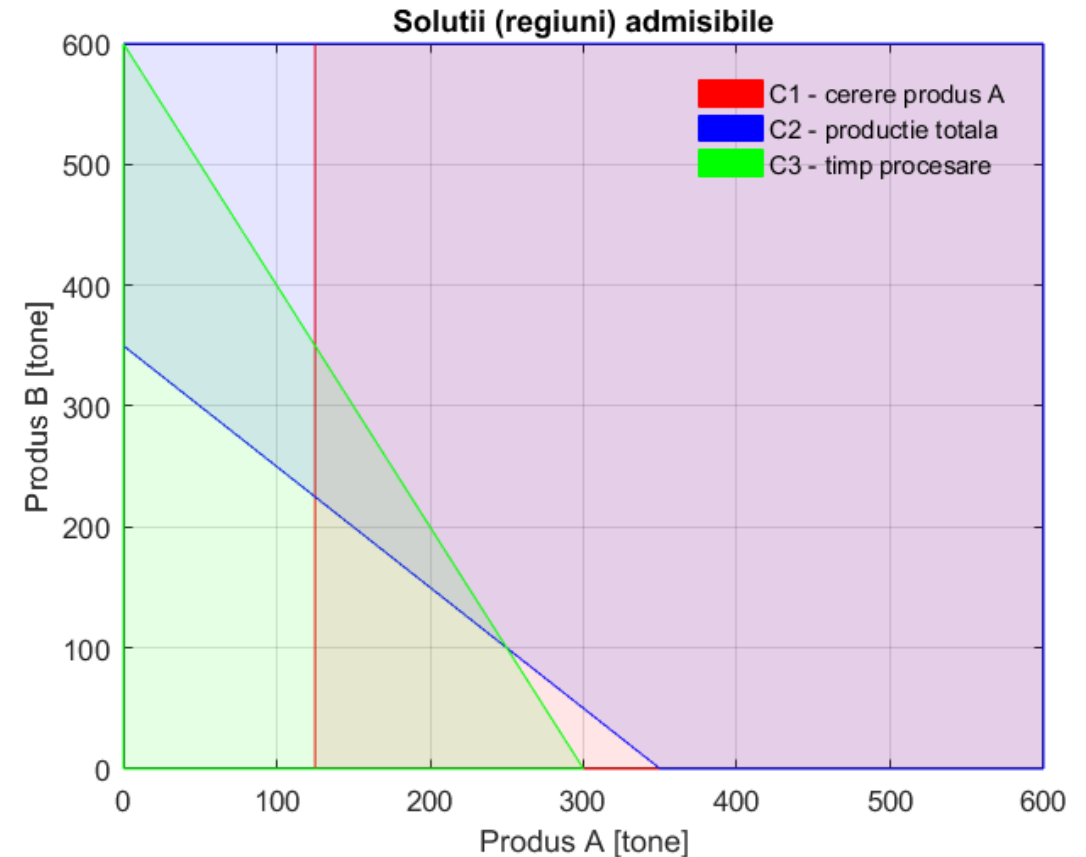
$A = 0 \Rightarrow B =$ _____

$B = 0 \Rightarrow A =$ _____

C3: $2A + 1B \leq 600$ _____

$A = 0 \Rightarrow B =$ _____

$B = 0 \Rightarrow A =$ _____



Mulțimea soluțiilor admisibile
= intersecția regiunilor obținute

Metoda grafică (cont.)

2) Calculăm coordonatele punctelor de extrem ale regiunii obținute

3) Identificăm punctul de extrem în care valoarea funcției obiectiv $2A + 3B$ este minimă:

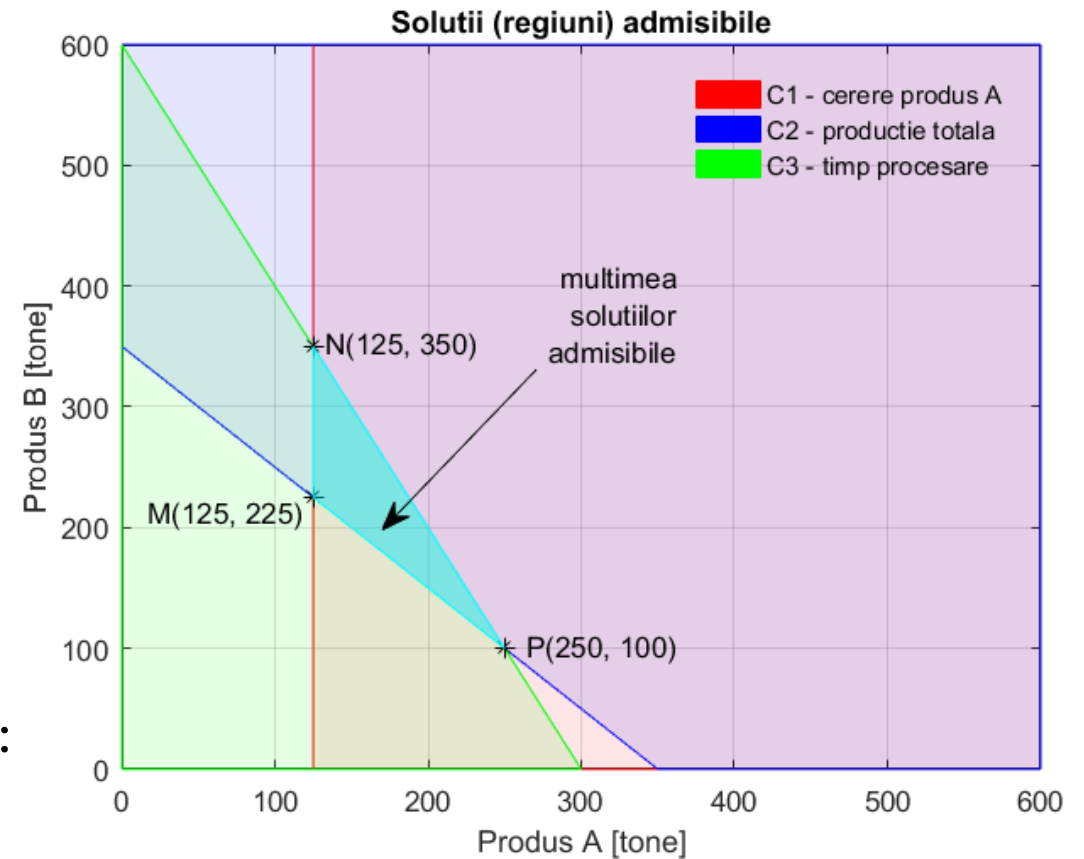
M : _____

N : _____

P : _____

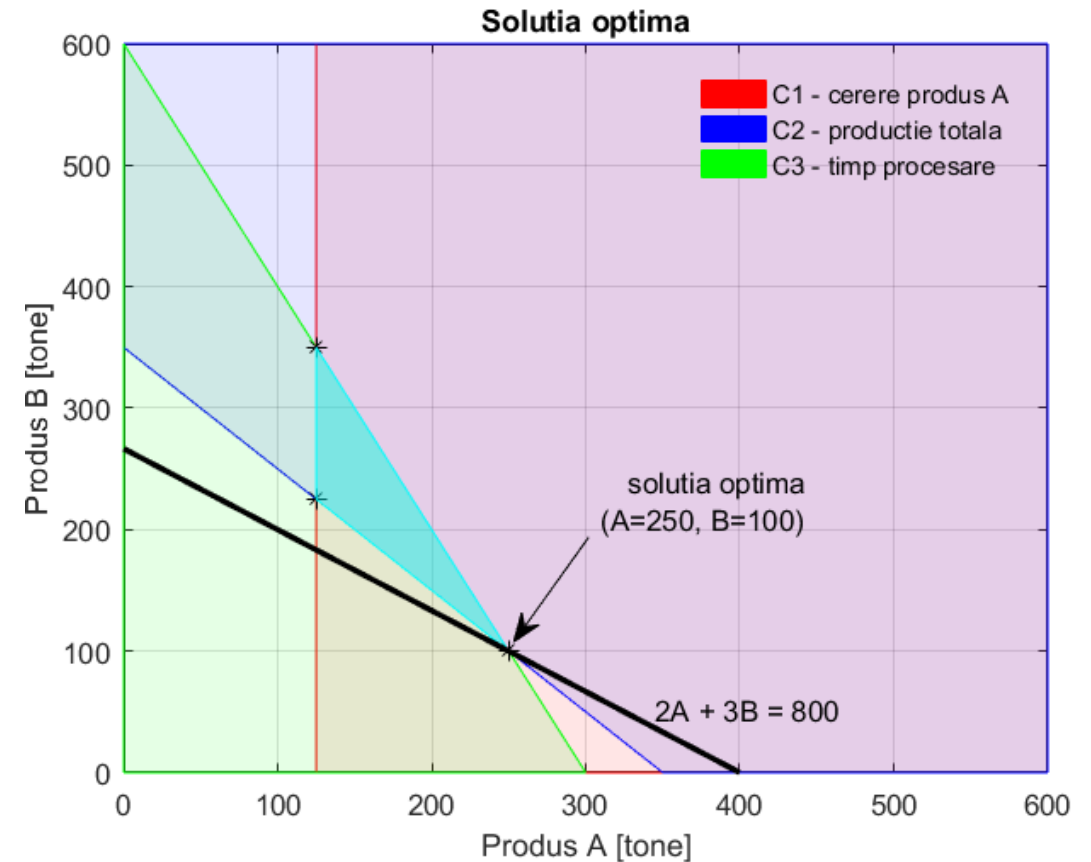
4) Coordonatele acestui punct sunt valorile optime:

$A = \underline{\hspace{2cm}}$ și $B = \underline{\hspace{2cm}}$



Interpretarea soluției

- Costul minim este 800 mii lei și se obține pentru $A = 250$ tone și $B = 100$ tone
- Producția totală dorită de 350 tone este atinsă exact: $250 + 100 = 350$
- Timpul maxim de procesare este utilizat integral: $2 \cdot 250 + 100 = 600$
- Cererea minimă pentru produsul A este depășită: $250 > 125$
- Constrângerea privind cererea minimă pentru produsul A nu este activă în soluția optimă



Variabile de surplus

În problemele LP, pentru constrângerile de tip $\geq$, se introduc **variabile de surplus** (*surplus variables*)

- Variabilele de surplus indică depășirea nivelului minim impus de constrângere
- În funcția obiectiv, aceste variabile au coeficient 0, deoarece nu modifică valoarea costului/profitului
- Pentru transformarea inegalităților în egalități
 - La constrângerile de tip $\geq$, **variabilele de surplus se scad**
 - La constrângerile de tip $\leq$, **variabilele de reducere se adaugă**

- După introducerea acestor variabile, modelul matematic devine:

Pentru soluția optimă $A = 250, B = 100$:

$$s_1 = 125, s_2 = 0 \text{ și } s_3 = 0$$

Min	$2A$	$+3B$	$+0s_1$	$+0s_2$	$+0s_3$		(funcția obiectiv)
s. t.	$1A$		$-1s_1$			$= 125$	(cerere produs A)
	$1A$	$+1B$		$-1s_2$		$= 350$	(producție totală)
	$2A$	$+1B$			$+1s_3$	$= 600$	(timp procesare)
	$A,$	$B,$	$s_1,$	$s_2,$	s_3	≥ 0	(nenegativitate)

Interpretare

$s_1 = 125$: se produc cu 125 tone peste cererea minimă pentru produsul A

$s_2 = 0$: producția totală este exact 350 tone

$s_3 = 0$: timpul de procesare este utilizat integral

Variabile de reducere și variabile de surplus

Variabile de reducere

O constrângere de tip:

$$a_i x_1 + b_i x_2 \leq c_i$$

se transformă prin **adăugarea unei variabile de reducere**:

$$a_i x_1 + b_i x_2 + s_i = c_i$$

Variabile de surplus

O constrângere de tip:

$$a_i x_1 + b_i x_2 \geq c_i$$

se transformă prin **scăderea unei variabile de surplus**:

$$a_i x_1 + b_i x_2 - s_i = c_i$$

Pentru a obține forma standard a modelului LP, **variabilele de reducere** și **variabilele de surplus** se introduc în funcția obiectiv cu coeficient 0

Inegalitățile care definesc constrângerile se transformă în egalități astfel: **variabilele de reducere se adaugă**, iar **variabilele de surplus se scad**

Pentru rezolvarea problemelor LP prin metoda grafică nu este necesară scrierea modelului în formă standard

Cuprins

Problemă LP de maximizare

Problemă LP de minimizare

Situații speciale în problemele de programare liniară

- Soluții optime alternative
- Soluții nefezabile
- Soluții nemărginite

Rezumat

Situații speciale în problemele LP

1

Soluții optime alternative

2

Soluții inexistente
(problemă nefezabilă)

3

Soluții nemărginite
(problemă nemărginită)

Soluții optime alternative

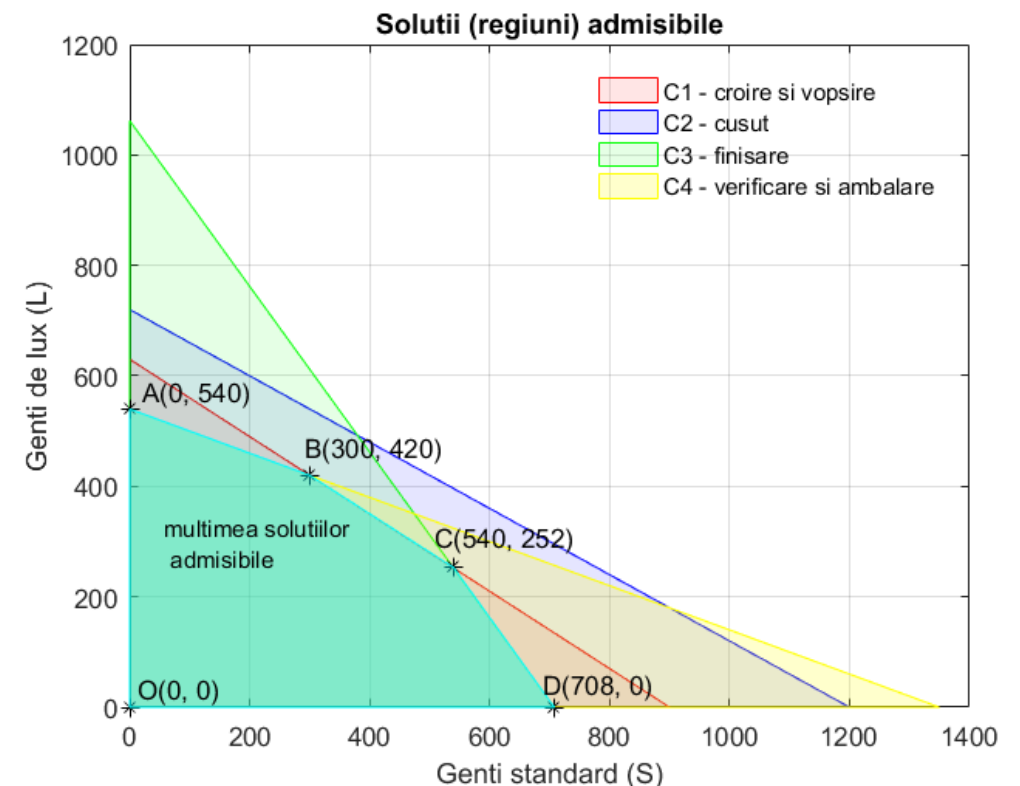
- Dacă o dreaptă de nivel a funcției obiectiv coincide cu o latură a frontierei mulțimii soluțiilor admisibile, atunci există **soluții optime alternative**: toate punctele de pe acel segment sunt optime

Ex: Considerăm exemplul cu geantile de voiaj, cu aceleași constrângeri, dar presupunând că profitul pentru o geantă standard este 6.3 lei.

- Modelul matematic devine

Max	$6.3S$	+	$9L$		(funcția obiectiv)
s. t.	$0.7S$	+	$1L$	≤ 630	(croire și vopsire)
	$0.5S$	+	$0.83L$	≤ 600	(coasere)
	$1S$	+	$0.67L$	≤ 708	(finisare)
	$0.1S$	+	$0.25L$	≤ 135	(verificare și ambalare)
	$S,$		L	≥ 0	(nenegativitate)

Mulțimea soluțiilor admisibile nu se modifică, deoarece este determinată doar de constrângeri; prin urmare, punctele de extrem rămân aceleași

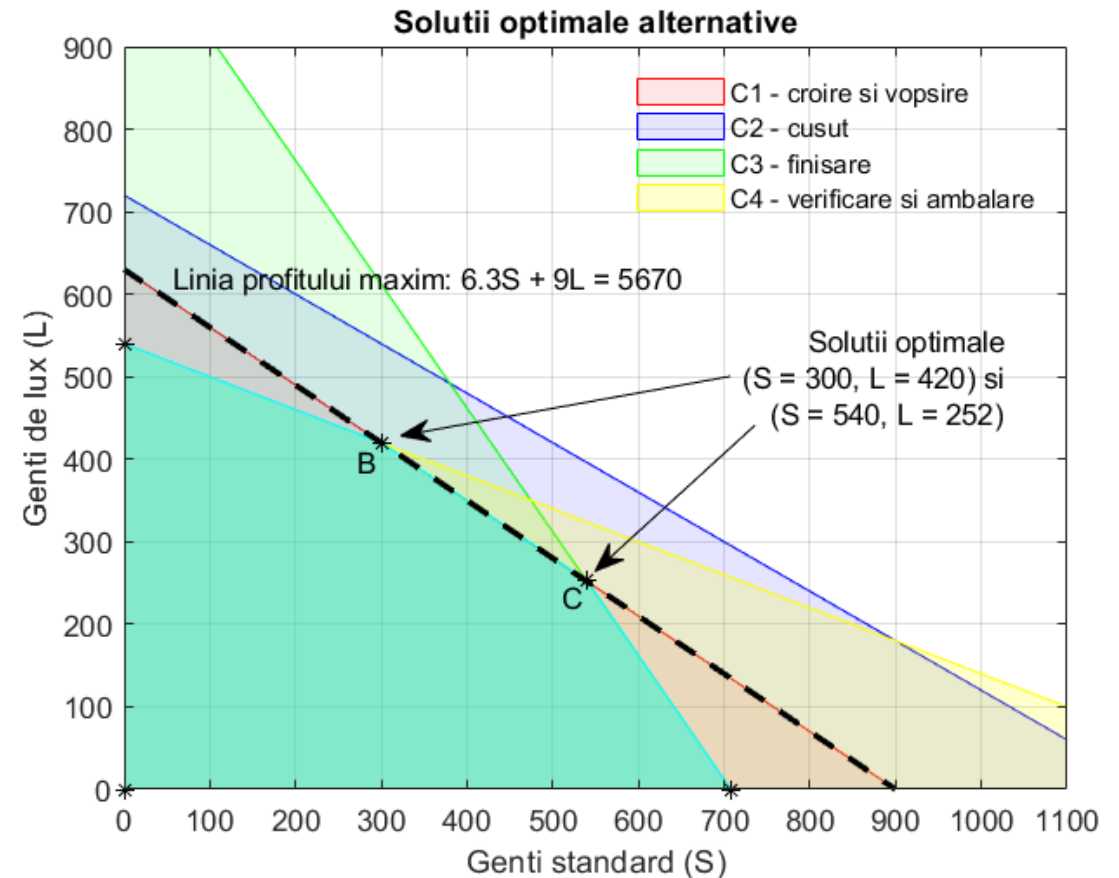


Soluții optime alternative (cont.)

- Calculăm valoarea noii funcții obiectiv $6.3S + 9L$ în punctele de extrem

- O: $6.3 \cdot 0 + 9 \cdot 0 = 0$
- A: $6.3 \cdot 0 + 9 \cdot 540 = 4860$
- B: $6.3 \cdot 300 + 9 \cdot 420 = 5670$
- C: $6.3 \cdot 540 + 9 \cdot 252 = 5670$
- D: $6.3 \cdot 708 + 9 \cdot 0 = 4460.4$

- Valoarea funcției obiectiv este aceeași în punctele B și C
 - Prin urmare, orice punct de pe segmentul BC este soluție optimă



Concluzie: o problemă LP cu soluții optime alternative oferă flexibilitate decizională: toate punctele de pe segmentul optim au aceeași valoare a funcției obiectiv, iar alegerea finală poate fi făcută pe baza unor criterii suplimentare

Problemă LP nefezabilă

- În practică, pot apărea **probleme LP nefezabile** atunci când
 - Cerințele impuse sunt prea mari în raport cu resursele disponibile
 - Constrângerile sunt incompatibile între ele
- Dacă mulțimea soluțiilor admisibile este vidă spunem că problema LP este nefezabilă

Ex: Considerăm exemplul cu gențile de voiaj, dar adăugăm noi cerințe minime de producție

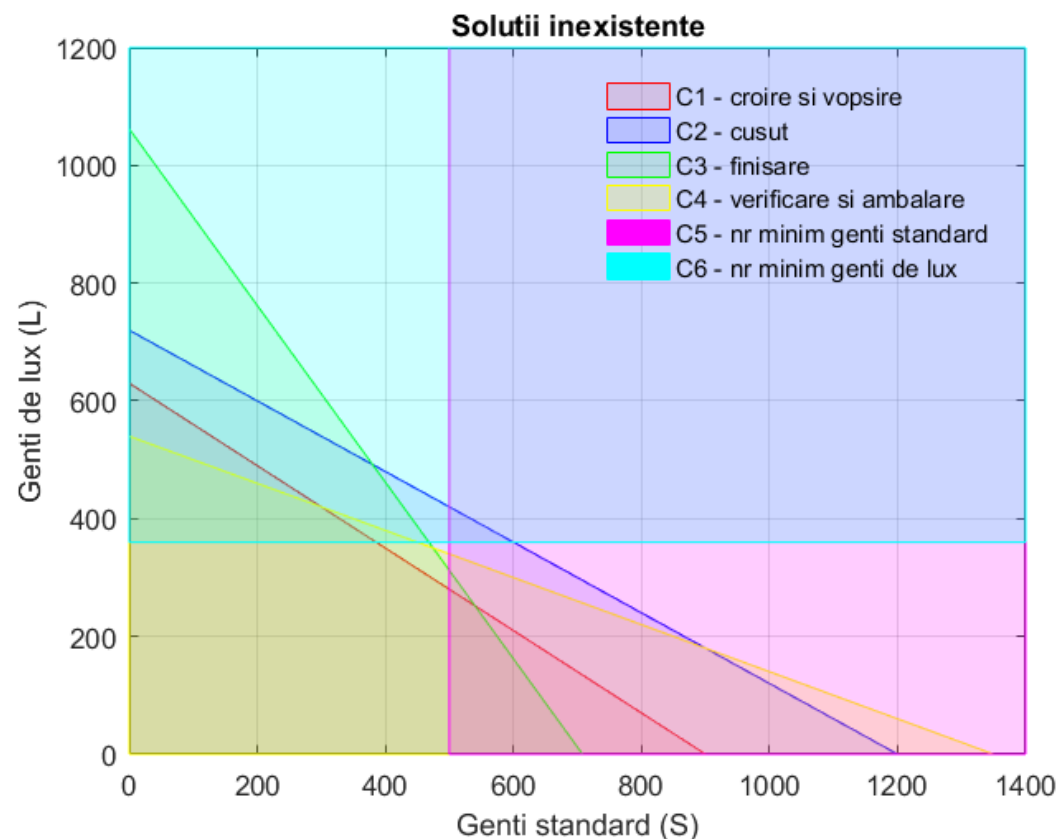
- Presupunem că managerul solicită fabricarea a cel puțin 500 de genți standard și a cel puțin 360 de genți de lux

- Modelul matematic devine

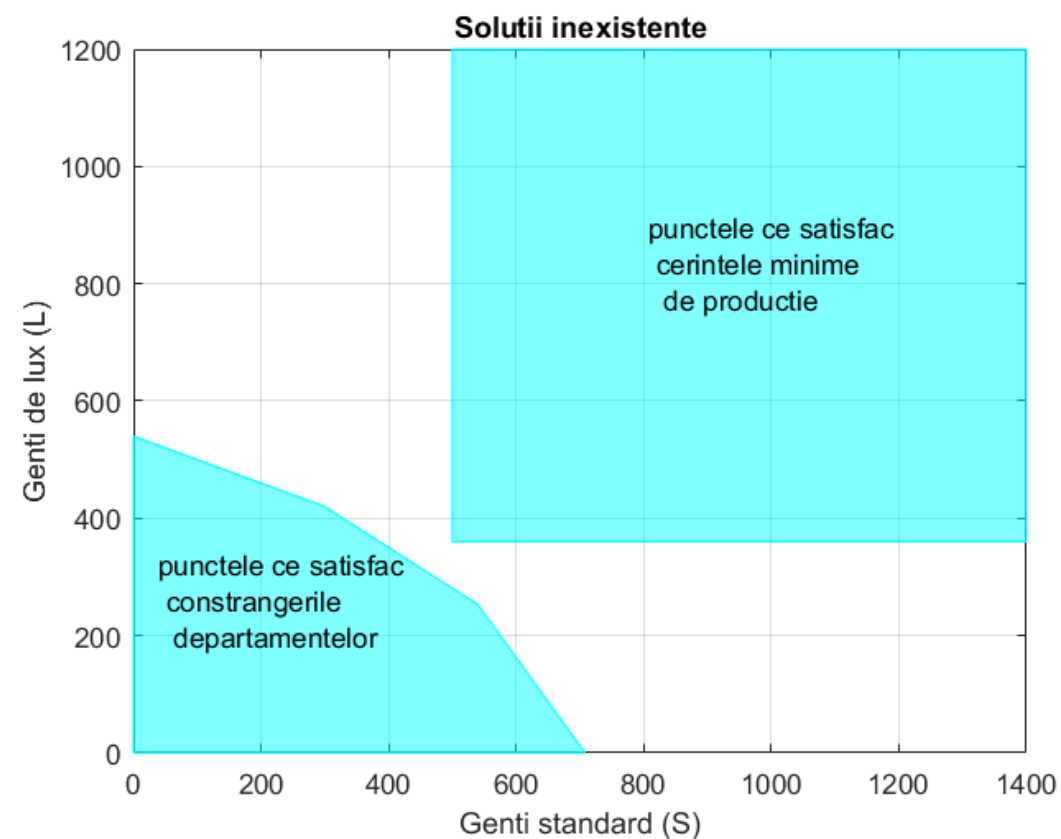
Max	10S	+9L			(funcția obiectiv)
s. t.	0.7S	+1L	≤	630	(croire și vopsire)
	0.5S	+0.83L	≤	600	(coasere)
	1S	+0.67L	≤	708	(finisare)
	0.1S	+0.25L	≤	135	(verificare și ambalare)
	1S		≥	500	(număr minim genți standard)
		1L	≥	360	(număr minim genți de lux)
	S,	L	≥	0	(nenegativitate)

Problemă LP nefezabilă (cont.)

- Reprezentarea tuturor constrângerilor



- Regiunea permisă de resurse nu se intersectează cu regiunea impusă de noile cerințe minime de producție



Concluzie: mulțimea soluțiilor admisibile este vidă; nu există valori ale lui S și L care să satisfacă simultan toate constrângerile

Problemă LP nefezabilă (cont.)

➤ Pentru această problemă, inexistența soluțiilor poate fi explicată factorilor de decizie astfel:

- Cu resursele existente, nu este posibilă producerea a 500 de genți standard și 360 de genți de lux
- Analiza indică resursele suplimentare necesare pentru ca planul să devină realizabil
- Managerul poate decide fie suplimentarea resurselor, fie relaxarea cerințelor minime de producție

Proces	Resurse minime necesare [ore]	Resurse existente [ore]	Resurse adiționale necesare [ore]
Croire și vopsire	$\frac{7}{5} \cdot 500 + 360 = 710$	630	80
Coasere	$\frac{1}{2} \cdot 500 + \frac{5}{6} \cdot 360 = 550$	600	0
Finisare	$500 + \frac{2}{3} \cdot 360 = 740$	708	32
Verificare și ambalare	$\frac{1}{10} \cdot 500 + \frac{1}{4} \cdot 360 = 140$	135	5

➤ Analiza problemei LP este utilă pentru identificarea modificărilor necesare înainte de punerea în aplicare a planului

Observație: modificarea funcției obiectiv nu rezolvă nefezabilitatea; problema provine din incompatibilitatea constrângerilor cu resursele disponibile

Soluții nemărginite

- O problemă LP de **maximizare** este **nemărginită** dacă valoarea funcției obiectiv poate crește oricât de mult, fără a încălca vreo constrângere
- O problemă LP de **minimizare** este **nemărginită** dacă valoarea funcției obiectiv poate scădea oricât de mult, fără a încălca vreo constrângere
- Într-o problemă reală, o problemă nemărginită indică, de obicei, o formulare incompletă a modelului
 - Cel mai probabil, o constrângere relevantă a fost omisă
- Din punct de vedere managerial, o astfel de situație este nerealistă
 - De exemplu, într-o problemă de maximizare a profitului, ar însemna că profitul poate crește nelimitat

Concluzii – situații speciale în problemele LP

Soluții optime alternative

Apar când o dreaptă de nivel a funcției obiectiv coincide cu o latură a frontierei regiunii fezabile

Idee-cheie: există mai multe soluții cu aceeași valoare optimă

Interpretare managerială: decidentul are flexibilitate și poate alege folosind criterii suplimentare

Problemă nefezabilă

Apare când mulțimea soluțiilor admisibile este vidă

Idee-cheie: constrângerile nu pot fi satisfăcute simultan

Interpretare managerială: trebuie relaxate cerințele sau suplimentate resursele; modificarea funcției obiectiv nu rezolvă problema

Problemă nemărginită

Apare când valoarea funcției obiectiv poate crește/scădea nelimitat fără încălcarea constrângerilor

Idee-cheie: nu există optim finit

Interpretare managerială: de obicei, modelul este incomplet; probabil lipsește o constrângere relevantă

Idee finală: aceste situații arată că interpretarea modelului LP este la fel de importantă ca rezolvarea numerică a acestuia

Rezumat

- Am formulat modele LP pentru două probleme
 - maximizare a profitului
 - minimizare a costurilor
- ☐ Am determinat soluția optimă folosind metoda grafică
- Un model LP conține
 - 1) O funcție obiectiv liniară, care se maximizează sau se minimizează
 - 2) Un set de constrângeri liniare
 - 3) Variabile de decizie nenegative
- Pentru forma standard
 - ☐ Constrângerile de tip $\leq$ se transformă în egalități prin variabile de reducere
 - ☐ Constrângerile de tip $\geq$ se transformă în egalități prin variabile de surplus
 - O variabilă de reducere indică, de obicei, o resursă neutilizată
 - O variabilă de surplus indică depășirea unui nivel minim impus
- Modelul LP este în formă standard când toate constrângerile sunt scrise ca egalități

Rezumat

- Dacă o problemă LP este nefezabilă sau nemărginită, nu există soluție optimă finită
 - ❑ În cazul nefezabilității, nu există nicio soluție admisibilă
 - ❑ În cazul unei soluții nemărginite, funcția obiectiv poate deveni
 - Oricât de mare, pentru o problemă de maximizare
 - Oricât de mică, pentru o problemă de minimizare

- În cazul soluțiilor optime alternative
 - ❑ Există mai multe soluții optime
 - ❑ Dacă două puncte de extrem sunt optime, atunci toate punctele de pe segmentul care le unește sunt, de asemenea, optime

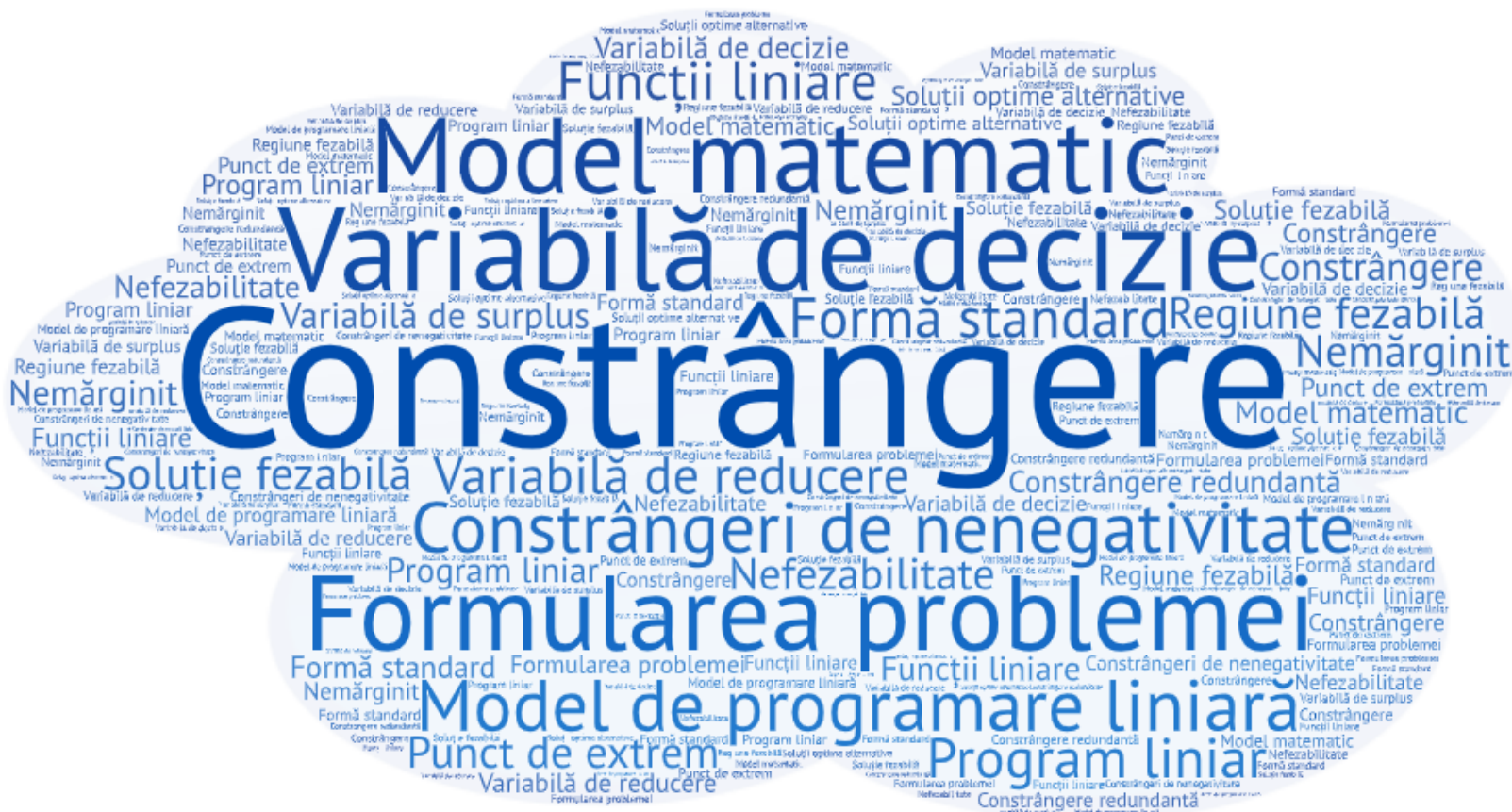
Rezumat

Întrebări finale

Care sunt variabilele de decizie?

Ce constrângeri limitează modelul?

Ce înseamnă soluția optimă în context managerial?



Rezumat

Programarea liniară

- ✓ Formularea problemei
- ✓ Metoda grafică

Problemă LP de maximizare

- ✓ Formularea problemei
- ✓ Modelul matematic
- ✓ Metoda grafică
- ✓ Variabile de reducere

Problemă LP de minimizare

- ✓ Metoda grafică
- ✓ Variabile de surplus

Situații speciale în problemele de programare liniară

- ✓ Soluții optime alternative
- ✓ Soluții nefezabile
- ✓ Soluții mărginite

→ **Programarea liniară: analiza de sensibilitate și interpretarea soluției**